PART2　式の値

2　[1]　$\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ を2重根号をはずして簡単にせよ。また，$\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，b を2重根号を用いずに表せ。

[2]　$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{7}$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし，$x>1$ とする。

(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(2)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}$

(3)　$x^4+\dfrac{1}{x^4}$　　(4)　$x-\dfrac{1}{x}$

Point Pickup

[1]　$a>b>0$ のとき，$\sqrt{(a+b)\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$（複号同順）

また，(小数部分)＝(もとの数)－(整数部分)　である。

[2]　$\dfrac{1}{x}=y$ とおくと，

$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}\iff x+y=\sqrt{7}$$

$$x\cdot\frac{1}{x}=1\iff xy=1$$

である。

よって，基本対称式の値から対称式の値を求める問題と同様の考え方で解く。

第 1 講　PART2　確認問題

1 $\sqrt{86-18\sqrt{5}}$ を 2 重根号をはずして簡単にすると,

$\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イ}}$ となる。

また, $\sqrt{86-18\sqrt{5}}$ の整数部分を a, 小数部分を b とすると,

$a=\boxed{ウ}$, $b=\boxed{エ}-\sqrt{\boxed{オ}}$ である。

2 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{6}$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし，$x>1$ とする。

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\boxed{カ}$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$

(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=\boxed{ケコ}$

(4) $x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{\boxed{サ}}$

PART2　式の値

2　[1]　$\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ を２重根号をはずして簡単にせよ。また，$\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，b を２重根号を用いずに表せ。

[2]　$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{7}$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし，$x>1$ とする。

(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(2)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}$

(3)　$x^4+\dfrac{1}{x^4}$　　(4)　$x-\dfrac{1}{x}$

[1]　$\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{27-2\sqrt{50}}=\sqrt{(25+2)-2\sqrt{25\cdot 2}}=\sqrt{(\sqrt{25}-\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{25}-\sqrt{2}=5-\sqrt{2}$

$1<\sqrt{2}<2$ より，$-2<-\sqrt{2}<-1$　よって　$3<5-\sqrt{2}<4$ であるから，$a=3$

したがって，$b=(5-\sqrt{2})-a=(5-\sqrt{2})-3=2-\sqrt{2}$

[2]　(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=(\sqrt{7})^2-2=5$

(2)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(\sqrt{7})^3-3\cdot\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

（別解）

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{7}\cdot 5-\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

(3)　$x^4+\dfrac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=5^2-2=23$

(4)　$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2=5-2=3$

$x>1$ より $0<\dfrac{1}{x}<1$　　よって　$x-\dfrac{1}{x}>0$　　したがって　$x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{3}$

第 1 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：9，イ：5，ウ：6，エ：3，オ：5

[解説]

$\sqrt{86-18\sqrt{5}}=\sqrt{86-2\sqrt{9^2\cdot 5}}$

$=\sqrt{(81+5)-2\sqrt{81\cdot 5}}$ [A]

$=\sqrt{(\sqrt{81}-\sqrt{5})^2}$

$=\sqrt{81}-\sqrt{5}=\mathbf{9-\sqrt{5}}$

$2^2<5<3^2$ より　$\sqrt{2^2}<\sqrt{5}<\sqrt{3^2}$ [B]

すなわち　$2<\sqrt{5}<3$

よって　$-3<-\sqrt{5}<-2$

ゆえに　$9-3<9-\sqrt{5}<9-2$

$6<9-\sqrt{5}<7$

よって，整数部分 a は　$a=\mathbf{6}$

小数部分 b は　$b=(9-\sqrt{5})-a$ [C]

$=(9-\sqrt{5})-6$

$=\mathbf{3-\sqrt{5}}$

[A]　$a>0$，$b>0$ とする。
① $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$
② $a>b$ のとき
$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

[B]　$\sqrt{■}$ の整数部分を調べるには，
$n^2\leqq ■<(n+1)^2$
となる整数 n を見つける。

[C]
(小数部分)＝(もとの数)－(整数部分)

2 [正解] カ：4，キ：3，ク：6，ケコ：14，サ：2

[解説]

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}$ [D] [E]

$=(\sqrt{6})^2-2\cdot 1=\mathbf{4}$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ [E]

$=(\sqrt{6})^3-3\cdot 1\cdot\sqrt{6}=\mathbf{3\sqrt{6}}$

（別解）

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ [E]

$=\sqrt{6}\cdot 4-1\cdot\sqrt{6}=\mathbf{3\sqrt{6}}$

(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2$

$=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}$ [F]

$=4^2-2\cdot 1=\mathbf{14}$

(4) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ [G]

$=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}$

$=4-2\cdot 1=2$

$x>1$ より　$0<\dfrac{1}{x}<1$

よって　$x-\dfrac{1}{x}>0$

したがって　$x-\dfrac{1}{x}=\mathbf{\sqrt{2}}$

[D]　基本対称式の値から対称式の値を求める問題と同様に考える。
値を求めたい式を $x+\dfrac{1}{x}$ と $x\cdot\dfrac{1}{x}$ で表す。

[E]
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2)-xy(x+y)$

[F]
$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$x^4+y^4=(x+y)(x^3+y^3)-xy(x^2+y^2)$

[G]　$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$